Zadatak 16. Odredi ekstreme sljedećih funkcija:

1) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+9}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

3) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$;

4) $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-3}$;

5) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$;

6) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

Rješenje. **1)** $f'(x)=\dfrac{2(x^2+9)-2x\cdot 2x}{(x^2+9)^2}=\dfrac{2x^2+18-4x^2}{(x^2+9)^2}=\dfrac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}$
$=\dfrac{2(3-x)(3+x)}{(x^2+9)^2}$,

$$f''(x)=\left[\frac{18-2x^2}{(x^2+9)^2}\right]'=\frac{-4x(x^2+9)^2-(18-2x^2)2(x^2+9)(2x)}{(x^2+9)^4}$$
$=\dfrac{4x(x^2+9)[-x^2-9-18+2x^2]}{(x^2+9)^4}=\dfrac{4x(x^2-27)}{(x^2+9)^3}$. Stacionarne točke su $x_1=3$ i $x_2=-3$. $f''(3)=\dfrac{12\cdot(-18)}{18^3}<0$ i $f''(-3)=\dfrac{-12\cdot(-18)}{18^3}>0$ slijedi da je $x_1=3$ lokalni maksimum, a $x_2=-3$ lokalni minimum. Vrijednost funkcije u točki $x_1=3$ je $f(3)=\dfrac{1}{3}$, a u $x_2=-3$ je $f(-3)=-\dfrac{1}{3}$. $m\left(-3,-\dfrac{1}{3}\right)$, $M\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$.

2) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$. Stacionarne točke su $x_1=0$ i $x_2=2$. $f''(0)=-1<0$ i $f''(2)=1>0$ slijedi da je $x_1=0$ točka lokalnog maksimuma, a $x_2=2$ točka lokalnog minimuma. Vrijednost funkcije u točki $x_1=0$ je $f(0)=-2$, a u $x_2=2$ je $f(2)=2$. $M(0,-2)$, $m(2,2)$.

3) $f'(x)=\dfrac{1}{4}[2(x-2)(x+4)+(x-2)^2]=\dfrac{1}{4}(x-2)(2x+8+x-2)=\dfrac{1}{4}(x-2)(3x+6)=\dfrac{3}{4}(x-2)(x+2)=\dfrac{3}{4}(x^2-4)$, $f''(x)=\dfrac{3}{4}\cdot(2x)=\dfrac{3x}{2}$. Stacionarne točke su $x_1=-2$ i $x_2=2$. $f''(-2)=-3<0$ i $f''(2)=3>0$ slijedi da je $x_1=-2$ točka lokalnog maksimuma, a $x_2=2$ lokalnog minimuma. Vrijednost funkcije u točki $x_1=-2$ je $f(-2)=8$, a u $x_2=2$ je $f(2)=0$. $M(-2,8)$, $m(2,0)$.

4) $f'(x)=\dfrac{x^2-3x-3-(x-4)(2x-3)}{(x^2-3x-3)^2}=\dfrac{x^2-3x-3-(2x^2-11x+12)}{(x^2-3x-3)^2}$
$=\dfrac{-x^2+8x-15}{(x^2-3x-3)^2}=\dfrac{(3-x)(x-5)}{(x^2-3x-3)^2}$,

$$f''(x)=\frac{(-2x+8)(x^2-3x-3)^2+(x^2-8x+15)2(x^2-3x-3)(2x-3)}{(x^2-3x-3)^4}$$

$$= \frac{(x^2-3x-3)\cdot 2[(4-x)(x^2-3x-3)+(2x-3)(x^2-8x+15)]}{(x^2-3x-3)^3}$$
$$= \frac{2(4x^2-12x-12-x^3+3x^2+3x+2x^3-16x^2+30x-3x^2+24x-45)}{(x^2-3x-3)^3}$$
$$= \frac{2(x^3-12x^2+45x-57)}{(x^2-3x-3)^3}.$$

Stacionarne točke su $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$. $f''(3) = \frac{2(27-12\cdot 9+45\cdot 9-57)}{(9-9-3)^3} = \frac{2\cdot(-3)}{-27} = \frac{2}{9} > 0$ i $f''(5) = \frac{2(125-12\cdot 25+45\cdot 5-57)}{(25-15-3)^3} = \frac{2\cdot(-7)}{343} = -\frac{2}{49} < 0$ slijedi da je $x_1 = 3$ točka lokalnog minimuma, a $x_2 = 5$ točka lokalnog maksimuma. Vrijednost funkcije u točki $x_1 = 3$ je $f(3) = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$, a u točki $x_2 = 5$ je $f(5) = \frac{1}{7}$. $m\left(3, \frac{1}{3}\right)$, $M\left(5, \frac{1}{7}\right)$

5) $f'(x) = \frac{x^2-2x(x-1)}{x^4} = \frac{x^2-2x^2+2x}{x^4} = \frac{x(2-x)}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$, $f''(x) = \frac{-x^3-(2-x)3x^2}{x^6} = \frac{-x^2(x+6-3x)}{x^6} = \frac{2x-6}{x^4} = \frac{2(x-3)}{x^4}$. Stacionarna točka je $x = 2$. $f''(2) = \frac{2-16}{16} = -\frac{7}{8} < 0$ slijedi da je $x = 2$ točka lokalnog maksimuma. Vrijednost funkcije u $x = 2$ je $f(2) = \frac{1}{4}$. $M\left(2, \frac{1}{4}\right)$.

6) $$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^3+2x^2+2x-x^2-x-1-2x^3+2x^2-2x-x^2+x-1}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2},$$
$$f''(x) = \frac{4x(x^2+x+1)-(2x^2-2)\cdot 2\cdot(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{4x(x^2+x+1)-(4x^2-4)(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}$$
$$= \frac{4x^3+4x^2+4x-8x^3-4x^2+8x+4}{(x^2+x+1)^3}$$
$$= \frac{-4x^3+12x+4}{(x^2+x+1)^3}.$$

Stacionarne točke su $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. $f''(-1) = \frac{4-12+4}{1-1+1)^3} = -4 < 0$ i $f''(1) = \frac{-4+12+4}{1+1+1)^3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} > 0$ slijedi da je $x_1 = -1$ točka lokalnog maksimuma, a $x_2 = 1$ točka lokalnog minimuma. Vrijednost funkcije u točki $x_1 = -1$ je $f(-1) = \frac{1+1+1}{1-1+1} = 3$, a u točki $x_2 = 1$ je

$$f(1)=\frac{1-1+1}{1+1+1}=\frac{1}{3}.\ M(-1,3),\ m\left(1,\frac{1}{3}\right).$$