Zadatak 18. Odredi ekstreme funkcija:

1) $f(x)=x^2e^{-x}$; **2)** $f(x)=x\cdot e^{x-x^2}$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$; **4)** $f(x)=x^2\ln x$;

5) $f(x)=x-2\ln x$.

Rješenje. **1)** $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$, $f''(x)=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}=(2-4x+x^2)e^{-x}$. Stacionarne točke računamo iz $x(2-x)=0 \implies x_1=0$ i $x_2=2$. $f''(0)=2>0$; $f''(2)=e^{-2}\cdot(-2)<0$ pa slijedi da je $x_1=0$ točka lokalnog minimuma, a $x_2=2$ točka lokalnog maksimuma. Vrijednost funkcije u točki $x_1=0$ je $f(0)=0$, a u točki $x_2=2$ je $f(2)=4e^{-2}$. Ekstremi funkcije su točke $m(0,0)$ i $M\left(2,\dfrac{4}{e^2}\right)$.

2) $f'(x)=e^{x-x^2}+x(1-2x)e^{x-x^2}=(1+x-2x^2)e^{x-x^2}$, $f''(x)=(1-4x)e^{x-x^2}+(1+x-2x^2)(1-2x)e^{x-x^2}=(1-4x+1+x-2x^2-2x-2x^2+4x^3)e^{x-x^2}=(4x^3-4x^2-5x+2)e^{x-x^2}$. Stacionarne točke računamo iz $1+x-2x^2=0 \implies (1-x)(1+2x)=0 \implies x_1=1$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$. $f''(1)=4-4-5+2=-3<0$ i $f''\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{5}{2}+2\right)e^{-\frac{3}{4}}=3e^{-\frac{3}{4}}>0$ pa slijedi da je $x_1=1$ točka lokalnog maksimuma, a $x_2=-\dfrac{1}{2}$ točka lokalnog minimuma. Vrijednost funkcije u točki $x_1=1$ je $f(1)=1$, a u točki $x_2=-\dfrac{1}{2}$ je $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$. Ekstremi funkcije su točke $M(1,1)$, $m\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{e^3}}\right)$.

3) $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$, $f''(x)=\dfrac{\dfrac{\ln^2 x}{x}-(\ln x-1)\ln x\cdot\dfrac{2}{x}}{\ln^4 x}=\dfrac{\ln x-2\ln x+2}{x\ln^3 x}=\dfrac{2-\ln x}{x\ln^3 x}$. Stacionarne točke tražimo iz $\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}=0 \implies \ln x-1=0 \implies \ln x=1 \implies x=e$. $f''(e)=\dfrac{1}{e}>0$ pa je $x=e$ točka lokalnog minimuma. Vrijednost funkcije u toj točki je $f(e)=e$. Ekstrem funkcije je točka $m(e,e)$.

4) $f'(x)=2x\ln x+x=x(1+2\ln x)$, $f''(x)=1+2\ln x+x\cdot\dfrac{2}{x}=3+2\ln x$. Stacionarne točke tražimo iz $(1+2\ln x)=0 \implies x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=3+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2>0$ pa je $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ točka lokalnog minimuma. Vrijednost funkcije u toj točki je $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\dfrac{1}{e}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2e}$. Ekstrem funkcije je točka $m\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},-\dfrac{1}{2e}\right)$.

5) $f'(x)=1-\dfrac{2}{x}$, $f''(x)=\dfrac{2}{x^2}$. Stacionarne točke tražimo iz izraza

$1-\dfrac{2}{x}=0 \implies \dfrac{2}{x}=1 \implies x=2$. $f''(2)=\dfrac{1}{2}>0$ pa je $x=2$ točka lokalnog minimuma. Vrijednost funkcije u toj točki je $f(2)=2-2\ln 2$. Ekstrem funkcije je točka $m(2, 2-2\ln 2)$.