

Zadatak 19. Nađi najmanju i najveću vrijednost funkcije f na danom intervalu:

$$1) f(x) = \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, x \in [-2, 0];$$

$$2) f(x) = \sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{1+2x+x^2}, \\ x \in [0, 2];$$

$$3) f(x) = 4x^3 - x|x-2|, x \in [0, 3];$$

$$4) f(x) = |x^2 + x| + |x^2 + 5x + 6|, x \in [-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}].$$

Rješenje.

1) Najprije raspišemo funkciju:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{x-1}, & x \in [-2, -1) \\ \frac{1+x}{1-x}, & x \in [-1, 0] \end{cases},$$

a zatim je deriviramo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}, & x \in [-2, -1) \\ \frac{1-x+x+1}{(x-1)^2}, & x \in [-1, 0] \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2}{(x-1)^2}, & x \in [-2, -1) \\ \frac{2}{(x-1)^2}, & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

$$f'(x) \neq 0, \forall x \in [-2, 0]$$

$f(-2) = \left| \frac{1-2}{1+2} \right| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}, f(0) = \left| \frac{1}{1} \right| = 1, f(-1) = 0$. Najmanja vrijednost funkcije na zadanim intervalima je $m(-1, 0)$, a najveća $M(0, 1)$.

2) Funkciju zapišemo u obliku:

$$\begin{aligned} f(x) &= |1-x| + |1+x| = |1-x| + 1+x \\ &= \begin{cases} 1-x+1+x, & x \in [0, 1] \\ -1+x+1+x, & x \in (1, 2] \end{cases} = \begin{cases} 2, & x \in [0, 1] \\ 2x, & x \in (1, 2] \end{cases}, \end{aligned}$$

a zatim je deriviramo

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 2, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$

$f(2) = 4, f(0) = 2, f(1) = 2$. Najveća vrijednost funkcije na intervalu je $M(2, 4)$, a najmanja je $m(x, 2)$ za $\forall x \in [0, 1]$.

3) Napišimo funkciju u obliku:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 + x^2 - 2x, & x \in [0, 2) \\ 4x^3 - x^2 + 2x, & x \in [2, 3] \end{cases},$$

a zatim je deriviramo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 12x^2 + 2x - 2, & x \in [0, 2) \\ 12x^2 - 2x + 2, & x \in [2, 3] \end{cases} = \begin{cases} 2(6x^2 + x - 1), & x \in [0, 2) \\ 2(6x^2 - x + 1), & x \in [2, 3] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2(3x-1)(2x+1), & x \in [0, 2) \\ 2(6x^2 - x + 1), & x \in [2, 3] \end{cases}. \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{11}{27}, f(0) = 0, f(2) = 32, f(3) = 105. \text{ Najmanja vrijednost}$$

funkcije na zadanim intervalima je $m\left(\frac{1}{3}, -\frac{11}{27}\right)$, a najveća $M(3, 105)$.

4) Napišimo funkciju u obliku

$$\begin{aligned}
 f(x) &= |x(x+1)| + |(x+2)(x+3)| \\
 &= \begin{cases} x(x+1) - (x+2)(x+3), & x \in \left[-\frac{5}{2}, -2\right) \\ x(x+1) + (x+2)(x+3), & x \in [-2, -1] \\ -x(x+1) + (x+2)(x+3), & x \in [-1, 0) \\ x(x+1) + (x+2)(x+3), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x^2 + x - x^2 - 5x - 6, & x \in \left[-\frac{5}{2}, -2\right) \\ x^2 + x + x^2 + 5x + 6, & x \in [2, -1] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -x^2 - x + x^2 + 5x + 6, & x \in [-1, 0) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -4x - 6, & x \in \left[-\frac{5}{2}, -1\right] \\ 2(x^2 + 3x + 3), & x \in [-2, -1] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 4x + 6, & x \in [-1, 0) \end{cases},
 \end{aligned}$$

a zatim je deriviramo

$$f'(x) = \begin{cases} -4, & x \in \left[-\frac{5}{2}, -2\right] \\ 4x + 6, & x \in [-2, -1] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 4, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$

$4x + 6 = 0 \implies x = -\frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{5}{2}\right) = 4$, $f(-2) = 2$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 6$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{2}$. Najveća vrijednost funkcije na zadanim intervalima je $M\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{2}\right)$, a najmanja $m\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.