Zadatak 15. Sferi zadanog polumjera R upiši
1) valjak maksimalnog volumena;
2) valjak s najvećom površinom plašta;
3) stožac maksimalnog volumena;
4) stožac najmanjeg volumena.

Rješenje. **1)** Za valjak upisan u sferu vrijedi $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$ gdje je h visina valjka, r polumjer baze valjka, a R polumjer sfere. Odavde slijedi $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$. Volumen valjka jednak je $V = r^2\pi \cdot h = R^2\pi \cdot h - \frac{h^3}{4}\pi$. Deriviramo li funkciju $V(h) = R^2\pi \cdot h - \frac{h^3}{4}\pi$ dobit ćemo $V'(h) = R^2\pi - \frac{3}{4}h^2 \cdot \pi$. Izjednačimo to s nulom $R^2\pi - \frac{3}{4}h^2 \cdot \pi = 0 \implies h^2 = \frac{4R^2}{3} \implies h = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$, $r^2 = R^2 - \frac{4r^2}{12} = \frac{2R^2}{3} \implies r = \frac{\sqrt{6}R}{3}$.

2) Za valjak upisan u sferu vrijedi $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$ gdje je h visina valjka, r polumjer baze valjka, a R polumjer sfere. Za površinu plašta vrijedi $P = 2r\pi h = 2\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \cdot \pi \cdot h$. Deriviramo li funkciju $P(h) = 2\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \cdot \pi \cdot h$ dobit ćemo $P'(h) = 2\pi\left[\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} - \frac{h^2}{4\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}}\left(2R^2 - \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}}(2R^2 - h^2)$. Izjednačimo to s nulom $\frac{\pi}{\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}}(2R^2 - h^2) = 0 \implies 2R^2 = h^2 \implies h = R\sqrt{2}$, $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \implies r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

3) Za stožac upisan u sferu vrijedi $r^2 + (h-R)^2 = R^2 \implies r^2 = R^2 - (h-R)^2$ gdje je r polumjer baze stošca, h visina stošca, a R polumjer sfere. Za volumen stošca vrijedi $V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot h = \frac{1}{3}[r^2 - (h-R)^2] \cdot \pi \cdot h = \frac{\pi \cdot h}{3}(R - h + R)(R + h - R) = \frac{\pi \cdot h^2}{3}(2R - h) = \frac{2\pi h^2}{3} \cdot R - \frac{\pi \cdot h^3}{3}$. Deriviramo li funkciju $V(h) = \frac{2\pi \cdot h^2}{3} \cdot R - \frac{\pi \cdot h^3}{3}$ dobit ćemo $V'(h) = \frac{4\pi}{3}R \cdot h - \pi \cdot h^2$. Izjednačimo to s nulom $\frac{4\pi}{3}R \cdot h - \pi \cdot h^2 = 0 \implies h\left(\frac{4}{3}R - h\right) = 0 \implies h = \frac{4}{3}R$, $r^2 = R^2 - \left(\frac{4}{3}R - R\right)^2 = R^2 - \frac{1}{9}R^2 = \frac{8}{9}R^2 \implies r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

4) $V(h) = \frac{1}{3}(R^2 - (h-R)^2) = 0 \implies R^2 = (h-R)^2 \implies R^2 = h^2 - 2Rh + R^2 \implies h(h-2R) = 0 \implies h = 2R.$