

Zadatak 19. Na osi x odredi točku T tako da zbroj udaljenosti $|AT| + |BT|$, $A(0, 3)$, $B(4, 5)$ bude što manji.

Rješenje. Za udaljenosti vrijedi $|AT| = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$ i $|BT| = \sqrt{(x-4)^2 + 5^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 25} = \sqrt{x^2 - 8x + 41}$. Naznačimo broj udaljenosti kao funkciju $f(x) = |AT| + |BT| = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 8x + 41}$. Deriviramo tu funkciju i dobijemo $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 41}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 41}}$. Izjednačimo to s nulom: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 41}} = 0 \implies x\sqrt{x^2 - 8x + 41} + (x - 4)\sqrt{x^2 + 9} = 0 \implies x\sqrt{x^2 - 8x + 41} = (4 - x)\sqrt{x^2 + 9}/2 \implies x^2(x^2 - 8x + 41) = (4 - x)^2(x^2 + 9) \implies x^4 - 8x^3 + 41x^2 = (x^2 - 8x + 16)(x^2 + 9) \implies x^4 - 8x^3 + 41x^2 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 9x^2 - 72x + 144 \implies 16x^2 + 72x - 144 = 0 \implies 2x^2 + 9x - 18 = 0 \implies 2x^2 + 12x - 3x - 18 = 0 \implies (2x - 3)(x + 6) = 0 \implies x = \frac{3}{2}$,
 $x = -6$; $T\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.