Zadatak 23. Odredi onu točku na elipsi koja je od jednog kraja male osi najviše udaljena. Kolika je ta udaljenost?

Rješenje. Iz jednadžbe elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ slijedi $x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2} = \frac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2}$. Ako je $a^2 \leqslant 2b^2$, tj. $a \leqslant b\sqrt{2}$, tada je $d = 2b$. Neka je $a > b\sqrt{2}$. Tada je $d^2 = x^2 + (b+y)^2 = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) + (b+y)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2} + b^2 + 2yb + y^2}$.

Deriviramo li funkciju $d(y) = \sqrt{a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2} + b^2 + 2yb + y^2}$ dobit ćemo $\frac{-\frac{2a^2y}{b^2} + 2b + 2y}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2} + b^2 + 2yb + y^2}}$. Izjednačimo to s nulom $-\frac{2a^2y}{b^2} + 2b + 2y = 0 \implies -a^2y + yb^2 = -b^3 \implies y(a^2 - b^2) = b^3 \implies y = \frac{b^3}{a^2 - b^2}$, $x = \sqrt{\frac{a^2b^2 - a^2\frac{b^6}{(a^2-b^2)^2}}{b^2}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2b^4}{(a^2-b^2)^2}} = \frac{a^2(a^2-b^2)^2 - a^2b^4}{(a^2-b^2)^2} = \frac{a^2[(a^2-b^2)^2 - b^4]}{(a^2-b^2)^2} = \frac{a^2[(a^2-b^2-b^2)(a^2-b^2+b^2)]}{(a^2-b^2)^2} = \frac{a^4(a^2-2b^2)}{(a^2-b^2)^2}$.

Koordinate točke T su $T\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-2b^2}, -\frac{b^3}{a^2-b^2}\right)$.