

Zadatak 25. Na krivulji $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ odredi točku u kojoj valja položiti tangentu koja bi s osi apscisa tvorila najveći kut.

Rješenje. Tangenta u točki pregiba Točka $T(x, y)$ je točka infleksije. Deriviramo funkciju $y(x)$ dvaput: $y'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = -2x(x^2 + 1)^{-2}$;

$$y''(x) = -2(x^2 + 1)^{-2} + (-2x)(-2)(x^2 + 1)^{-3}2x = -\frac{2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3}. \text{ Izjednačimo drugu derivaciju s nulom i dobijemo}$$

$$\frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies 8x^2 - 2x^2 - 2 = 0 \implies 6x^2 = 2 \implies$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, y = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{3}{4}. \text{ Te točke su } T_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right) \text{ i}$$

$$T_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right).$$