

Zadatak 24.

Nađi kut pod kojim se sijeku kružnice:

$$x^2 + y^2 - 4x = 1, \quad x^2 + y^2 - 2y = 9.$$

Rješenje.

Pronađimo sjecišta kružnica tako da oduzmemo jednu jednadžbu od druge. Dođimo da je $-4x + 2y = -8 \implies y = 2x - 4$. Uvrstimo ovaj izraz u prvu jednadžbu kružnice: $x^2 + 4x^2 - 16x + 16 - 4x = 1 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = 3$ i $y_1 = -2, y_2 = 2$. Kružnice se sijeku u točkama $S_1(3, 2)$ i $S_2(1, -2)$. Kut pod kojim se kružnice sijeku je kut pod kojim se sijeku njihove tangente u sjecištu. Dakle, koeficijent smjera tangente na prvu kružnicu

jednak je $k_1 = y'(x) = (\sqrt{1 + 4x - x^2})' = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{1 + 4x - x^2}}$, odnosno u točki

$S_1(3, 2)$ koeficijent iznosi $k_1 = \frac{4 - 2 \cdot 3}{2\sqrt{1 + 4 \cdot 3 - 3^2}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. Koeficijent

smjera tangente na drugu kružnicu jednak je $k_2 = y'(x) = (\sqrt{10 - x^2} + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{10 - x^2}} \cdot (-2x)$, odnosno u točki $S_1(3, 2)$ $k_2 = -3$. Kut je jednak:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-3 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = -1 \implies \varphi = 135^\circ. \text{ Za kut između}$$

dvaju pravaca uzimamo onaj manji, $\varphi = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.