Zadatak 30. Dokaži da jednadžbe

1) $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$; **2)** $x + \sin x = -\pi$

imaju točno jedan korijen.

Rješenje. **1)** $f(x) = \cos x + x - \frac{\pi}{2}$. $f'(x) = -\sin x + 1 \implies sinx = 1 \implies x = \frac{\pi}{2}$. Jedan je korijen jednadžbe očit, $x = \frac{\pi}{2}$. Kako bismo dokazali da drugih korijena jednadžba nema, dovoljno se uvjeriti kako je funkcija $f(x) = \cos x + x + \frac{\pi}{2}$ rastuća na $\mathbf{R}$. $f'(x) = (\cos x - \frac{\pi}{2} + x)' = -\underbrace{\sin x}_{\leqslant 1} + 1 \geqslant 0$ za sve $x \in \mathbf{R}$.

2) $x = -\pi$ jedan je korijen jednadžbe. Funkcija $f(x) = x + \pi + \sin x$ ima prvu derivaciju $f'(x) = 1 + \cos x$ veću od nule za sve $x \in \mathbf{R}$ te je f monotono rastuća funkcija. Zbog toga jednadžba nema drugih korijena.