Zadatak 35. Nađi najkraću udaljenost točke $T(x,y)$ od krivulje $y=f(x)$ ako je:

1) $T(2,-\frac{5}{2})$, $y=x^2-4x$;

2) $T(3,0)$, $y=2\sqrt{\ln x}$.

Rješenje. **1)** Trebamo pronaći na krivulji točku $D(x,x^2-4x)$ koja je dirалište tangente na tu krivulju i iz nje povući normalu kroz točku $T\left(2,-\dfrac{5}{2}\right)$. Dakle, točke D i T pripadaju istom pravcu (normali) pa vrijedi: $x^2-4x=k\cdot x+l$ i $-\dfrac{5}{2}=2k+l$. Oduzmemo drugu jednadžbu od prve i dobijemo da je $k_n=\dfrac{2x^2-8x+5}{2x-4}$. Deriviramo li jednadžbu krivulje dobit ćemo koeficijent smjera tangente na tu krivulju: $k_t=y'(x)=2x-4$. Za koeficijente smjera međusobno okomitih pravaca vrijedi: $k_1\cdot k_2=-1$ pa je, prema tome, $k_t\cdot k_n=\dfrac{2x^2-8x+5}{2x-4}\cdot 2x-4=2x^2-8x+5=-1 \implies x^2-4x+3=0 \implies x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \implies x_1=3,\ y_1=-3$ i $x_2=1,\ y_2=-3$. Dirališta imaju koordinate $D_1(3,-3)$ i $D_2(1,-3)$. Najkraća udaljenost točke T od krivulje je: $d=|D_1T|=\sqrt{(3-2)^2+\left(-3+\dfrac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}$.
$d=|D_2T|=\sqrt{(1-2)^2+\left(-3+\dfrac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}$.

2) Trebamo pronaći na krivulji točku $D(x,2\sqrt{\ln x})$ koja je diralište tangente na tu krivulju i iz nje povući normalu kroz točku $T\left(3,0\right)$. Dakle, točke D i T pripadaju istom pravcu (normali) pa vrijedi: $2\sqrt{\ln x}=k\cdot x+l$ i $0=3k+l$. Oduzmemo drugu jednadžbu od prve i dobijemo da je $k_n=\dfrac{2\sqrt{\ln x}}{x-3}$. Deriviramo li jednadžbu krivulje dobit ćemo koeficijent smjera tangente na tu krivulju: $k_t=y'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Za koeficijente smjera međusobno okomitih pravaca vrijedi: $k_1\cdot k_2=-1$ pa je, prema tome, $k_t\cdot k_n=\dfrac{2\sqrt{\ln x}}{x-3}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}=\dfrac{2}{x(x-3)}=-1 \implies x^2-3x+2=0 \implies x_{1,2}=$

$\dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \implies x_1 = 2$, $y_1 = 2\sqrt{\ln 2}$ i $x_2 = 1$, $y_2 = 0$. Dirališta imaju koordinate $D_1(2, 2\sqrt{\ln 2})$ i $D_2(1, 0)$. Najkraća udaljenost točke T od krivulje je: $d_1 = |D_1T| = \sqrt{(2-3)^2 + (2\sqrt{\ln 2} - 0)^2} = \sqrt{1 + 4\ln 2} \approx 1.94$, $d_2 = |D_2T| = \sqrt{(1-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$. Dakle, najkraća udaljenost točke T od krivulje je $d_1 = \sqrt{1 + 4\ln 2}$.