

Zadatak 18. Koje su od ovih funkcija injektivne:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| 1) $f(x) = 2x + 3$; | 2) $f(x) = -\sqrt{5}x + 1$; |
| 3) $f(x) = x^3 - 2$; | 4) $f(x) = (x - 2)^2$; |
| 5) $f(x) = 5$; | 6) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; |
| 7) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; | 8) $f(x) = 2^{1-x}$; |
| 9) $f(x) = \frac{2x}{ x-3 }$? | |

Rješenje.

1) Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$ tada vrijedi

$$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

Vidimo da mora biti $x_1 = x_2$. Dakle f je injektivna.

2) Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$ tada vrijedi

$$-\sqrt{5}x_1 + 1 = -\sqrt{5}x_2 + 1$$

$$-\sqrt{5}x_1 = -\sqrt{5}x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

Vidimo da mora biti $x_1 = x_2$. Dakle f je injektivna.

3) Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$ tada vrijedi

$$x_1^3 - 2 = x_2^3 - 2$$

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$x_1 = x_2$$

Vidimo da mora biti $x_1 = x_2$. Dakle f je injektivna.

4) Uzmimo $x_1 = 0 \neq 4 = x_2$ imamo:

$$f(0) = (0 - 2)^2 = 4 = (4 - 2)^2 = f(4).$$

Dakle, f nije injektivna.

5) Uzmimo npr. $x_1 = 1 \neq 2 = x_2$ imamo:

$$f(1) = 5 = f(2).$$

Dakle, f nije injektivna.

6) Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$ tada vrijedi

$$\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 - 1) = (x_2 + 1)(x_1 - 1)$$

$$x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 + x_1 - 2 - 1$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

Vidimo da mora biti $x_1 = x_2$. Dakle f je injektivna.

7) Uzmimo npr. $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$ imamo:

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1 = \frac{1}{1^2} = f(1).$$

Dakle, f nije injektivna.

8) $f(x) = 2^{1-x}$;

Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$ tada vrijedi

$$2^{1-x_1} = 2^{1-x_2}$$

$$1 - x_1 = 1 - x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Vidimo da mora biti $x_1 = x_2$. Dakle f je injektivna.

9) $f(x) = \frac{2x}{|x-3|}$;

Pretpostavimo da je $f(x_1) = f(x_2)$, tj

$$\frac{2x_1}{|x_1-3|} = \frac{2x_2}{|x_2-3|}.$$

Pogledajmo slučaj kada je izraz unutar prve apsolutne vrijednosti negativan, a unutar druge pozitivan, tj. $x_1 < 3$, $x_2 > 3$:

$$\frac{x_1}{3-x_1} = \frac{x_2}{x_2-3}$$

$$x_1(x_2-3) = x_2(3-x_1)$$

$$x_1x_2 - 3x_1 = 3x_2 - x_1x_2$$

$$2x_1x_2 - 3x_1 = 3x_2$$

$$x_1(2x_2-3) = 3x_2$$

$$x_1 = \frac{3x_2}{2x_2-3}$$

Npr. za $x_2 = 4$ dobijemo $x_1 = \frac{12}{5}$ ($x_1 \neq x_2$) i

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{3}{5}} = 4 \\ f(4) = \frac{4}{1} = 4 \end{array} \right\} \implies f(x_1) = f(x_2).$$

Funkcija f nije injekcija.