

Zadatak 6. Za funkciju $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, $x \neq 2$, vrijedi da je $f^{-1} = f$. Provjeri to! Uz koje će uvjete za funkciju $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ vrijediti $f = f^{-1}$?

Rješenje.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2};$$

$$x = \frac{2y+1}{y-2} \implies x(y-2) = 2y+1 \implies xy - 2x = 2y+1 \implies xy - 2y =$$

$$2x+1 \implies y = \frac{2x+1}{x-2} \implies f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2} = f(x);$$

Sada pogledajmo općenitiji slučaj, funkciju $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $cx+d \neq 0$.

$$x = \frac{ay+b}{cy+d} \implies x(cy+d) = ay+b \implies y \cdot cx + dx = ay+b \implies$$

$$y \cdot cx - y \cdot a = -dx + b \implies y = \frac{-dx+b}{cx-a} \implies f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \iff \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-dx+b}{cx-a} \implies a = -d.$$