Zadatak 9. Odredi inverzne funkcije sljedećih funkcija:

1) $f(x)=\log_3 x-\log_{\sqrt{3}} x$;

2) $f(x)=\log_2(4x)-\log_{\sqrt{2}} x$;

3) $f(x)=\log_{\sqrt{2}}(2x)+\log_{0.5} x$;

4) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(4x)+\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} x^2$;

5) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}+\log_{3\sqrt{3}} x^3$;

6) $f(x)=\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{x}+\log_{0.25}\dfrac{x}{4}$.

Rješenje. **1)** $f(x)=\log_3 x-\log_{\sqrt{3}} x$

$$x=\log_3 y-\log_{\sqrt{3}} y=\log_3 y-2\log_3 y=-\log_3 y=\log_3\frac{1}{y}$$
$$\frac{1}{y}=3^x\implies f^{-1}(x)=3^{-x}$$

2) $f(x)=\log_2(4x)-\log_{\sqrt{2}} x$

$$x=\log_2 4+\log_2 y-2\log_2 y=\log_2 4-\log_2 y=\log_2\frac{4}{y}$$
$$\frac{4}{y}=2^x\implies\frac{1}{y}=2^{x-2}\implies f^{-1}(x)=2^{2-x}$$

3) $f(x)=\log_{\sqrt{2}}(2x)+\log_{0.5} x$

$$x=2\log_2 2+2\log_2 y-\log_2 y=\log_2 4+\log_2 y=\log_2(4y)$$
$$4y=2^x\implies y=\frac{2^x}{4}\implies f^{-1}(x)=2^{x-2}$$

4) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(4x)+\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} x^2$

$$x=-\log_2 4-\log_2 y+2\log_2 y=-\log_2 4+\log_2 y=\log_2\frac{y}{4}$$
$$\frac{y}{4}=2^x\implies y=4\cdot 2^x\implies f^{-1}(x)=2^{x+2}$$

5) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}+\log_{3\sqrt{3}} x^3$

$$x=-\log_3 y+\log_3 9+\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\log_3 y=\log_3 y+2$$
$$\log_3 y=x-2\implies f^{-1}(x)=3^{x-2}$$

6) $f(x)=\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{x}+\log_{0.25}\dfrac{x}{4}$

$$x=3\cdot\frac{1}{2}\log_2 y-\frac{1}{2}\log_2 y+\frac{1}{2}\log_2 4=\log_2 y+1$$
$$\implies f^{-1}(x)=2^{x-1}$$