Zadatak 23. Riješi nejednadžbu $(g \circ f)(x) - (f \circ g)(x) \leqslant 2$, pri čemu je $f(x) = x + 1$, $g(x) = (\frac{1}{2})^{-2|x|}$.

Rješenje. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2|x|} = 2^{2|x|} = 4^{|x|}$

$$(f \circ g)(x) = 4^{|x|} + 1, (g \circ f)(x) = 4^{|x+1|}$$

$$4^{|x+1|} - 4^{|x|} - 1 \leqslant 2$$

$$2^{2|x+1|} - 2^{2|x|} \leqslant 3$$

(i) $x < -1$

$$2^{-2(x+1)} - 2^{-2x} \leqslant 3 \;\Big/ \cdot 2^{2(x+1)}$$

$$1 - 2^2 \leqslant 3 \cdot 2^{2x+2}$$

$$-3 \leqslant 3 \cdot 2^{2x+2} \;\Big/ : 3$$

$$2^{2x+2} \geqslant -1$$

$$\Longrightarrow x \in \langle -\infty, -1 \rangle$$

(ii) $-1 \leqslant x < 0$

$$2^{2x+2} - 2^{-2x} \leqslant 3 \;\Big/ \cdot 2^{2x}$$

$$2^{4x+2} - 3 \cdot 2^{2x} - 1 \leqslant 0$$

$$4 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 2^{2x} - 1 \leqslant 0$$

$$4 \cdot 2^{4x} - 4 \cdot 2^{2x} + 2^{2x} - 1 \leqslant 0$$

$$\underbrace{(4 \cdot 2^{2x} + 1)}_{>0}(2^{2x} - 1) \leqslant 0$$

$$2^{2x} \leqslant 1 \Longrightarrow x \leqslant 0$$

$$\Longrightarrow x \in [-1, 0\rangle$$

(iii) $x \geqslant 0$

$$2^{2x+2} - 2^{2x} \leqslant 3$$

$$4 \cdot 2^{2x} - 2^{2x} \leqslant 3$$

$$3 \cdot 2^{2x} \leqslant 3 \;\Big/ : 3 \qquad \Longrightarrow x \in \langle -\infty, 0] = \mathbf{R}_0^-$$

$$2^{2x} \leqslant 1$$

$$x \leqslant 0$$

$$\Longrightarrow x = 0$$