Zadatak 10. Izračunaj sljedeće limese:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-2\sin x}{4x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} x-\sin x}{x}$.

Rješenje. **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)=1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin x}\cdot 3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\cdot 3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{3}{2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-2\sin x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\dfrac{1}{4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg} x-\dfrac{\sin x}{x}\right)=0-1=-1$.