Zadatak 18. Koliko rješenja ima jednadžba $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ ako je $f(x)=|x-1|$, $g(x)=x+a$, $a\in\mathbf{R}$?

Rješenje.

$$(f\circ g)(x)=|x+a-1|$$
$$(g\circ f)(x)=|x-1|+a$$

Za $a=0$ rješenje je svaki $x\in\mathbf{R}$.
Neka je $a\neq 0$.

$\underline{a<0}$

$x\in\langle-\infty,1\rangle$:

$$-x-a+1=-x+1+a$$
$$\emptyset$$

$x\in[1,1-a]$:

$$-x-a+1=x-1+a$$
$$x=1-a$$

$x\in\langle 1-a,\infty\rangle$:

$$x+a-1=x-1+a$$
$$0=0$$
$$x\in\langle 1-a,\infty\rangle;$$

$\underline{a>0}$

$x\in\langle-\infty,1-a\rangle$:

$$-x-a+1=-x+1+a$$
$$\emptyset$$

$x\in[1-a,1]$:

$$x+a-1=-x+1+a$$
$$x=1$$

$x\in\langle 1,\infty\rangle$:

$$x+a-1=x-1+a$$
$$0=0$$
$$x\in\langle 1,\infty\rangle;$$

Za $a\neq 0$, $a<0$ rješenje je svaki $x\in[1-a,+\infty\rangle$.
Za $a\neq 0$, $a>0$ rješenje je svaki $x\in[1,+\infty\rangle$.