Zadatak 4. Dokaži; ako je P površina lika omeđenog lukom parabole $y = x^2$, pravcima $x = a$ i $x = b$ $(0 < a < b)$, te s osi apscisa, onda je površina lika ispod parabole $y = kx^2$ nad istim intervalom $[a, b]$ jednaka $k \cdot P$.

Poopći ovu tvrdnju.

Rješenje. Gornja suma:

$$P_n = \frac{b}{n}\left(k\frac{b^2}{n^2} + k\frac{2^2 b^2}{n^2} + k\frac{3^2 b^2}{n^2} + \ldots + k\frac{n^2 b^2}{n^2}\right) = k\frac{b^3}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

$$P_n = k\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \implies \lim_{n\to\infty} P_n = k\frac{b^3}{3};$$

Donja suma:

$$p_n = k\frac{b^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \implies \lim_{n\to\infty} p_n = k\frac{b^3}{3};$$

$$\implies P_b = k \cdot \frac{b^3}{3}.$$

Analogno se pokaže da je $P_a = k \cdot \frac{a^3}{3}$, pa je

$$P_1 = k \cdot \frac{b^3}{3} - k \cdot \frac{a^3}{3} = k \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = k \cdot P.$$

Općenito, ako je P površina ispod funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, tada je površina ispod funkcije $kf(x)$ na istom intervalu jednaka $P_1 = k \cdot P$.