Zadatak 7. Izračunaj površinu lika omeđenog parabolom $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ i pravcem $y = x + 3$.

Rješenje. Pronađimo sjecišta pravca i krivulje:

$$\begin{aligned}
&y = \frac{1}{2}x^2 + 1\\
&\underline{y = x + 3}\\
&\frac{1}{2}x^2 + 1 = x + 3 \ \ / \cdot 2\\
&x^2 + 2 = 2x + 6\\
&x^2 - 2x - 4 = 0\\
&x^2 - 2x + 1 = 5\\
&(x-1)^2 = 5\\
&x - 1 = \pm\sqrt{5}\\
&x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Potražimo sumu:

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{a}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2+1\right)+\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{n}\right)^2+1\right)+\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3a}{n}\right)^2+1\right)+\ldots+\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{na}{n}\right)^2+1\right)\\
&= \frac{a^3}{2n^3} + \frac{a}{n} + \frac{4a^3}{2n^3} + \frac{a}{n} + \frac{9a^3}{2n^3} + \frac{a}{n} + \ldots + \frac{n^2a^3}{2n^3} + \frac{a}{n}\\
&= \frac{a^3}{2n^3}(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2) + n \cdot \frac{a}{n}\\
&= \frac{a^3}{2n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + a\\
&= \frac{a^3}{12} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} + a\\
P_a &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{12}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + a\right)\\
&= \frac{a^3}{12}\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + a\\
&= \frac{a^3}{12} \cdot 2 + a = \frac{a^3}{6} + a.
\end{aligned}$$

Analogno, $P_b = \frac{b^3}{6} + b$, odnosno $P = P_b - P_a = \frac{b^3 - a^3}{6} + b - a$. Površinu koju tražimo dobit ćemo tako da od površine ispod pravca oduzmemo površinu ispod krivulje. Iz zadatka 2. imamo izraz za površinu ispod pravca $P = \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot k + (b-a)l$ pa je $P_p = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{2} \cdot 1 + (2\sqrt{5}) \cdot 3 = 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$. Površina ispod grafa parabole jednaka je $P = \frac{b^3 - a^3}{6} + b - a$ pa je $P_k = \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5} - 1 + 3\sqrt{5} - 15 + 5\sqrt{5}}{6} + 2\sqrt{5} = \frac{16\sqrt{5}}{6} + 2\sqrt{5} = \frac{14\sqrt{5}}{3}$. Dakle, tražena površina je $P = P_p - P_k = 8\sqrt{5} - \frac{14\sqrt{5}}{3} = \frac{24\sqrt{5} - 14\sqrt{5}}{3} = \frac{10\sqrt{5}}{3}$.