Zadatak 8. Nađi površinu lika omeđenog parabolom $y = x^2 - x$ i pravcem $y = 3x$.

Rješenje. Pronađimo sjecišta pravca i krivulje:

$$\begin{aligned}
&y = x^2 - x\\
&y = 3x\\
\hline
&x^2 - x = 3x\\
&x^2 - 4x = 0\\
&x(x-4) = 0\\
&x_1 = 0\\
&x_2 = 4.
\end{aligned}$$

Potražimo sumu:

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{a}{n}\cdot\left(\left(\frac{a}{n}\right)^2-\frac{a}{n}\right)+\frac{a}{n}\cdot\left(\left(\frac{2a}{n}\right)^2-\frac{2a}{n}\right)+\frac{a}{n}\cdot\left(\left(\frac{3a}{n}\right)^2-\frac{3a}{n}\right)+\ldots+\frac{a}{n}\cdot\left(\left(\frac{na}{n}\right)^2-\frac{na}{n}\right)\\
&= \frac{a^3}{n^3}-\frac{a^2}{n^2}+\frac{4a^3}{n^3}-\frac{2a^2}{n^2}+\frac{9a^3}{n^3}-\frac{3a^2}{n^2}+\ldots+\frac{n^2a^3}{n^3}-\frac{na^2}{n^2}\\
&= \frac{a^3}{n^3}(1+4+9+\ldots+n^2)-\frac{a^2}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)\\
&= \frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{a^3}{6}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2}\\
P_a &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{n^2}\right)\\
&= \frac{a^3}{6}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{a^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{a^3}{6}\cdot 2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Analogno, $P_b = \frac{b^3}{3}-\frac{b^2}{2}$, odnosno $P = P_b - P_a = \frac{b^3-a^3}{3}-\frac{b^2-a^2}{2}$. Površinu koju tražimo dobit ćemo tako da od površine ispod pravca oduzmemo površinu ispod krivulje. Iz zadatka 2. imamo izraz za površinu ispod pravca $P = \frac{b^2-a^2}{2}\cdot k + (b-a)l$ pa je $P_p = \frac{16-0}{2}\cdot 3 + (4)\cdot 0 = 24$. Površina ispod grafa parabole jednaka je $P = \frac{b^3-a^3}{6}-\frac{b^2-a^2}{2}$ pa je $P_k = \frac{64-0}{3}-\frac{16-0}{2} = \frac{64}{3}-8 = \frac{64-24}{3} = \frac{40}{3}$. Dakle, tražena površina je $P = P_p - P_k = 24 - \frac{40}{3} = \frac{72-40}{3} = \frac{32}{3}$.