Zadatak 9. Nađi površinu lika omeđenog grafovima funkcija $f(x)=\dfrac{|4-x^2|}{4}$ i $g(x)=7-|x|$.

Rješenje. Raspišimo funkcije:

$$f(x)=\frac{|4-x^2|}{4}=\begin{cases}\frac{1}{4}(4-x^2), & x\in[-2,2]\\ \frac{1}{4}(x^2-4), & x\notin[-2,2]\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{1}{4}x^2, & x\in[-2,2]\\ \frac{1}{4}x^2-1, & x\notin[-2,2]\end{cases}$$

$$g(x)=7-|x|=\begin{cases}-x+7, & x\geqslant 0\\ x+7, & x<0.\end{cases}$$

Pronađimo sjecišta pravca i krivulje:

$$\begin{aligned} T_2: \qquad & -x+7=\frac{1}{4}x^2-1 \;/\cdot 4\\ & -4x+28=x^2-4\\ & x^2+4x-32=0\\ & (x+8)(x-4)=0\\ & x_{T_2}=4, \quad x_{T_1}=-4\end{aligned}$$

Iz prethodnih zadataka imamo izraz za površinu ispod pravca: $\dfrac{b^2-a^2}{2}\cdot k+(b-a)\cdot l$, gdje je k koeficijent smjera prvaca, a l odsječak na y-osi, odnosno izraz za površinu ispod parabole: $k\cdot\dfrac{b^3-a^3}{3}+(b-a)\cdot l$, gdje je k koeficijent uz x^2, a l slobodni član. Tražena površina jednaka je razlici površina ispod pravca i krivulje.

Promatramo prvi interval $[-4,-2]$:

$$\begin{aligned}P&=P_p-P_k=\frac{4-16}{2}\cdot 1+(-2+4)\cdot 7-\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{-8+64}{3}+(-2+4)\cdot(-1)\right]\\ &=-6+14-\frac{1}{4}\cdot\frac{56}{3}+2=10-\frac{14}{3}=\frac{16}{3}.\end{aligned}$$

Promatramo drugi interval $[-2,0]$:

$$\begin{aligned}P&=P_p-P_k=\frac{0-4}{2}\cdot 1+(0+2)\cdot 7-\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{0+8}{3}+(0+2)\cdot 1\right]\\ &=-2+14+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}-2=10+\frac{2}{3}=\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Promatramo treći interval $[0,2]$:

$$\begin{aligned}P&=P_p-P_k=\frac{4-0}{2}\cdot(-1)+(2-0)\cdot 7-\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{8-0}{3}+(2-0)\cdot 1\right]\\ &=-2+14+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}+2=14+\frac{2}{3}=\frac{44}{3}.\end{aligned}$$

I na kraju, četvrti interval $[2,4]$:

$$\begin{aligned}P&=P_p-P_k=\frac{16-4}{2}\cdot(-1)+(4-2)\cdot 7-\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{64-8}{3}+(4-2)\cdot(-1)\right]\\ &=-6+14-\frac{1}{4}\cdot\frac{56}{3}-2=6-\frac{14}{3}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Sada ybrojimo sve te površine i dobijemo $P = \frac{16}{3} + \frac{32}{3} + \frac{44}{3} + \frac{4}{3} = \frac{96}{3} = 32$.