

Zadatak 26.

Zadan je niz (a_n) , $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 8n$. Dokaži da je opći član ovog niza $a_n = (2n - 1)^2$.

Rješenje.

Dokazujemo matematičkom indukcijom $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 8n \implies a_n = (2n - 1)^2$.

Za $n = 1$ imamo $a_1 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = (2 - 1)^2 = 1^2 = 1$ pa tvrdnja vrijedi.

Prepostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$: $a_k = (2k - 1)^2$. Dokažimo je za $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= [2(k + 1) - 1]^2 = [2k + 2 - 1]^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 + 8k = (2k - 1)^2 + 8k = a_k + 8k. \end{aligned}$$