

Zadatak 24.

Četiri broja čine aritmetički niz, a njihov je zbroj 20. Zbroj njihovih recipročnih vrijednosti iznosi $\frac{25}{24}$. Koji su to brojevi?

Rješenje.

Niz od četiriju članova možemo zapisati kao $x - 3d$, $x - d$, $x + d$, $x + 3d$ (razlika niza označena je s $2d$!). Sada imamo:

$$x - 3d + x - d + x + d + x + 3d = 20$$

$$4x = 20 \implies x = 5.$$

Uvrstimo li dobiveni rezultat u drugi uvjet imamo:

$$\frac{1}{5 - 3d} + \frac{1}{5 - d} + \frac{1}{5 + d} + \frac{1}{5 + 3d} = \frac{25}{24}$$

$$\frac{5 + 3d + 5 - 3d}{25 - 9d^2} + \frac{5 + d + 5 - d}{25 - d^2} = \frac{25}{24} \quad / : 10$$

$$\frac{1}{25 - 9d^2} + \frac{1}{25 - d^2} = \frac{5}{48}$$

$$\frac{25 - d^2 + 25 - 9d^2}{(25 - 9d^2)(25 - d^2)} = \frac{5}{48}$$

$$5(625 - 250d^2 + 9d^4) = 48(50 - 10d^2) \quad / : 5$$

$$625 - 250d^2 + 9d^4 = 48(10 - 2d^2)$$

$$9d^4 - 250d^2 + 625 - 480 + 96d^2 = 0$$

$$9d^4 - 154d^2 + 145 = 0$$

$$9d^4 - 9d^2 - 145d^2 + 145 = 0$$

$$(9d^2 - 145)(d^2 - 1) = 0$$

Iz čega slijedi $d^2 = 1$ ili $d^2 = \frac{145}{9}$, odnosno

$$d^2 = 1 \implies d_1 = 1, d_2 = -1$$

$$d^2 = \frac{145}{9} \implies d_3 = \frac{\sqrt{145}}{3}, d_4 = -\frac{\sqrt{145}}{3}$$

Zadatak ima četiri rješenja:

$$\left. \begin{array}{l} 2, 4, 6, 8 \\ 8, 6, 4, 2 \\ 5 - \sqrt{145}, 5 - \frac{\sqrt{145}}{3}, 5 + \frac{\sqrt{145}}{3}, 5 + \sqrt{145} \\ 5 + \sqrt{145}, 5 + \frac{\sqrt{145}}{3}, 5 - \frac{\sqrt{145}}{3}, 5 - \sqrt{145} \end{array} \right\} 4 \text{ rješenja}$$