

Zadatak 27.

Članovi aritmetičkog niza su cijeli brojevi. Dokaži da je umnožak četiriju uzastopnih članova niza uvećan za četvrtu potenciju razlike niza, kvadrat cijelog broja.

Rješenje.

Neka su to članovi niza $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$. Onda je:

$$\begin{aligned}(x - 3d)(x - d)(x + d)(x + 3d) + (2d)^4, \quad x \in \mathbf{Z}, d \in \mathbf{Z} \\ = (x^2 - 9d^2)(x^2 - d^2) + 16d^4 \\ = x^4 - 10d^2x^2 + 9d^4 + 16d^4 = x^4 - 10d^2x^2 + 25d^4 \\ = (x^2 - 5d^2)^2 = y^2, y \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$