Zadatak 50. Riješi jednadžbe:

1) $2+5+8+\ldots+x=155$;
2) $1-5-11-\ldots-x=-207$;
3) $x-1+x-3+\ldots+x-27=70$;
4) $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x-2}{x}+\ldots+\dfrac{1}{x}=3$.

Rješenje. **1)** Pribrojnici na lijevoj strani su članovi aritmetičkog niza. Imamo $d=3$, $a_1=2$ i $a_n=x$. Prvo ćemo pomoću već poznate formule za sumu aritmetičkog niza izračunati n. Imamo:

$$\begin{aligned} na_1+\frac{n(n-1)}{2}d&=155,\\ 2n+\frac{n(n-1)}{2}3&=155,\\ 4n+3n^2-3n&=310,\\ 3n^2+n-310&=0,\\ (n-10)(3n+31)&=0; \end{aligned}$$

Zbog $n\in\mathbf{N}$ rješenje je $n=10$. Sada uvrštavajući dobiveni n dobijemo:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(a_1+a_n)&=155,\\ 5(2+x)&=155,\\ 2+x&=31,\\ x&=29. \end{aligned}$$

2) Pribrojnici na lijevoj strani su članovi aritmetičkog niza. Imamo $d=-6$, $a_1=1$ i $a_n=-x$. Prvo ćemo pomoću već poznate formule za sumu aritmetičkog niza izračunati n. Imamo:

$$\begin{aligned} na_1+\frac{n(n-1)}{2}d&=-207,\\ n+\frac{n(n-1)}{2}(-6)&=-207,\\ n-3n^2+3n&=-207,\\ 3n^2-4n-207&=0,\\ (n-9)(3n+23)&=0; \end{aligned}$$

Zbog $n\in\mathbf{N}$ rješenje je $n=9$. Sada uvrštavajući dobiveni n dobijemo:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(a_1+a_n)&=-207,\\ \frac{9}{2}(1-x)&=-207,\\ 1-x&=-46,\\ x&=47. \end{aligned}$$

3) Pribrojnici na lijevoj strani su članovi aritmetičkog niza. Imamo $d = -2$, $a_1 = x - 1$ i $a_n = x - 27$. Prvo izračunajmo n:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d, \\ x - 27 &= x - 1 + (n-1)(-2), \\ -27 &= -1 + -2n + 2, \\ 2n &= 28, \\ n &= 14; \end{aligned}$$

Zbog uvrstimo dobiveni n:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(a_1 + a_n) &= 70, \\ 7(2x - 28) &= 70, \\ 2x - 28 &= 10, \\ 2x &= 38, \\ x &= 19. \end{aligned}$$

4) Danu jednakost možemo zapisati kao:

$$1 + 2 + \ldots + (x-2) + (x-1) = 3x.$$

Pribrojnici na lijevoj strani su članovi aritmetičkog niza. Imamo: $d = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = x - 1$, $S_n = 3x$. Iz $a_n = a_1 + (n-1)d$ dobijemo:

$$x - 1 = 1 + (n-1) \cdot 1, \quad n = x - 1;$$

Uvrstimo dobiveno u $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$:

$$3x = \frac{x-1}{2}(1 + x - 1) \implies 6x = (x-1)x \implies x - 1 = 6 \implies x = 7.$$