

Zadatak 56. Zbroj prvih triju članova aritmetičkog niza jednak je 15, zbroj posljednjih triju jednak je 78, a zbroj svih članova niza iznosi 155. Odredi taj niz.

Rješenje.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 15, \quad a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 78, \quad S_n = 155$$

Prvo nađemo broj članova niza:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_2 + a_{n-1}) = \frac{n}{2}(a_3 + a_{n-2})$$

$$3S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) + \frac{n}{2}(a_2 + a_{n-1}) + \frac{n}{2}(a_3 + a_{n-2})$$

$$= \frac{n}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) = \frac{n}{2}(15 + 78) = \frac{93n}{2}$$

$$3 \cdot 155 = \frac{93n}{2} \implies 93n = 930 \implies n = 10;$$

Sada iz uvijeta $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ i $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 78$ imamo:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3d = 15 \implies a_1 + d = 5;$$

$$\begin{aligned} a_{n-2} + a_{n-1} + a_n &= 3a_1 + (n-3 + n-2 + n-1)d = 3a_1 + (3n-6)d \\ &= 3a_1 + 24d = 78 \quad / : 3 \implies a_1 + 8d = 26; \end{aligned}$$

Dobili smo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a_1 + 8d = 26$$

$$\underline{a_1 + d = 5}$$

$$7d = 21$$

$$\implies d = 3, \quad a_1 = 2$$

$$\implies 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29$$