

Zadatak 62. U aritmetičkom je nizu $a_n = \frac{1}{m}$, $a_m = \frac{1}{n}$. Odredi zbroj prvih mn njegovih članova.

Rješenje. $a_n = \frac{1}{m}$, $a_m = \frac{1}{n}$, $S_{mn} = ?$

Iz uvijeta zadatka dobijemo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a_1 + (n-1)d = \frac{1}{m}$$

$$a_1 + (m-1)d = \frac{1}{n}$$

Oduzmemo li drugu jednadžbu od prve imamo:

$$(n-1-m+1)d = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

$$(n-m)d = \frac{n-m}{mn} \implies d = \frac{1}{mn};$$

Uvrstimo d u prvu jednadžbu dobijemo a_1 :

$$a_1 = \frac{1}{m} + (1-n)\frac{1}{mn} = \frac{n+1-n}{mn} \implies a_1 = \frac{1}{mn};$$

Sada možemo izračunati traženu sumu:

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \frac{mn}{2} \left(\frac{2}{mn} + (mn-1) \cdot \frac{1}{mn} \right) = \frac{mn}{2} \cdot \frac{2+mn-1}{mn} \\ &\implies S_{mn} = \frac{mn+1}{2}. \end{aligned}$$