

Zadatak 12. Odredi geometrijski niz ako je

- 1) $a_1 - a_2 = 35$, $a_3 - a_4 = 560$;
- 2) $a_4 - a_2 = 18$, $a_5 - a_3 = 36$;
- 3) $a_1 - a_3 + a_5 = -65$, $a_1 + a_7 = -325$;
- 4) $a_1 + a_4 = \frac{7}{16}$, $a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}$;
- 5) $a_1 + a_2 + a_3 = 31$, $a_1 + a_3 = 26$;
- 6) $a_1 + a_2 + a_3 = 70$, $a_1 a_2 a_3 = 8\ 000$.

Rješenje. 1) Svedimo dobiveni sustav jednadžbi na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{array}{r} a_1 - a_2 = 35 \\ a_3 - a_4 = 560 \\ \hline a_1 - a_1 q = 35 \\ a_1 q^2 - a_1 q^3 = 560 \\ \hline a_1 (1 - q) = 35 \\ a_1 q^2 (1 - q) = 560 \end{array}$$

Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom dobijemo:

$$q^2 = 16 \implies q_{1,2} = \pm 4;$$

Dobivene kvocijente uvrstimo u prvu jednadžbu:

$$a_1(1 \mp 4) = 35 \implies (a_1)_1 = -\frac{35}{3}, (a_1)_2 = 7;$$

2) Svedimo dobiveni sustav jednadžbi na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{array}{r} a_4 - a_2 = 18 \\ a_5 - a_3 = 36 \\ \hline a_1 q^3 - a_1 q = 18 \\ a_1 q^4 - a_1 q^2 = 36 \\ \hline a_1 q (q^2 - 1) = 18 \\ a_1 q^2 (q^2 - 1) = 36 \end{array}$$

Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom dobijemo:

$$q = 2;$$

Dobiveni kvocijent uvrstimo u prvu jednadžbu:

$$2a_1(4 - 1) = 18 \implies a_1 = 3;$$

3) Svedimo dobiveni sustav jednadžbi na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} a_1 - a_3 + a_5 &= -65 \\ \underline{a_1 + a_7 = -325} \\ a_1 - a_1 q^2 + a_1 q^4 &= -65 \\ \underline{a_1 + a_1 q^6 = -325} \\ a_1(1 - q^2 + q^4) &= -65 \\ \underline{a_1(1 + q^6) = -325} \\ a_1(1 - q^2 + q^4) &= -65 \\ \underline{a_1(1 + q^2)(1 - q^2 + q^4) = -325} \end{aligned}$$

Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom dobijemo:

$$1 + q^2 = 5 \implies q_{1,2} = \pm 2;$$

Dobivene kvocijente uvrstimo u prvu jednadžbu:

$$a_1 = \frac{-65}{1 - 4 + 16} = -5;$$

4) Svedimo dobiveni sustav jednadžbi na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= \frac{7}{16} / \cdot 16 \\ a_3 - a_2 + a_1 &= \frac{7}{8} / \cdot 8 \\ \underline{16(a_1 + a_1 q^3) = 7} \\ 8(a_1 q^2 - a_1 q + a_1) &= 7 \\ \underline{16a_1(1 + q)(1 - q + q^2) = 7} \\ 8a_1(1 - q + q^2) &= 7 \end{aligned}$$

Podijelimo li prvu jednadžbu s drugom dobijemo:

$$2(1 + q) = 1, \quad 1 + q = \frac{1}{2} \implies q = -\frac{1}{2};$$

Dobiveni kvocijent uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$16a_1 \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) = 7 \implies 16a_1 \frac{7}{8} = 7 \implies 2a_1 = 1 \implies a_1 = \frac{1}{2};$$

5) Iz dobivenog sustava jednadžbi možemo izračunati a_2 :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 31 \\ \underline{a_1 + a_3 = 26} \\ a_2 &= 5 \\ a_1 q &= 5 \end{aligned}$$

Sredimo drugu jednadžbu i uvrstimo dobiveno $a_1 = \frac{5}{q}$:

$$a_1 + a_1 q^2 = 26$$

$$a_1(1 + q^2) = 26$$

$$\frac{5}{q}(1 + q^2) = 26$$

$$5 + 5q^2 = 26q$$

$$5q^2 - 26q + 5 = 0$$

$$5q^2 - 25q - q + 5 = 0$$

$$5q(q - 5) - (q - 5) = 0$$

$$(q - 5)(5q - 1) = 0$$

$$q_1 = 5, q_2 = \frac{1}{5};$$

$$a_1 = 1, a_2 = 25;$$

6) Svedimo dobiveni sustav jednadžbi na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 70$$

$$\underline{a_1 a_2 a_3 = 8000}$$

$$a_1(1 + q + q^2) = 70$$

$$\underline{a_1^3 q^3 = 8000}$$

Iz druge jednadžbe dobijemo:

$$a_1 q = 20 \implies a_1 = \frac{20}{q}$$

Uvrstimo dobiveno u prvu jednadžbu i izračunajmo kvocijent:

$$\frac{20}{q}(1 + q + q^2) = 70 / : 10$$

$$2 + 2q + 2q^2 = 7q$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$2q^2 - 4q - q + 2 = 0$$

$$(2q - 1)(q - 2) = 0$$

Rješenja su $q_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 40$ i $q_2 = 2$, $a_2 = 10$.