

**Zadatak 23.** Tri broja čine geometrijski niz. Njihov je zbroj 21, a zbroj njihovih recipročnih vrijednosti  $\frac{7}{12}$ . Odredi te brojeve.

*Rješenje.* Iz zadanih podataka dobije se sustav dviju jednadžbi koji možemo svesti na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice iz kojeg možemo izraziti  $a_1$  pomoću kvocijenta:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 21 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} &= \frac{7}{12} \\ a_1(1 + q + q^2) &= 21 \\ \frac{a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3}{a_1^3q^3} &= \frac{7}{12} \\ \frac{a_1^2q + a_1^2q^2 + a_1^2q^3}{a_1^3q^3} &= \frac{7}{12} \\ \frac{a_1q \cdot a_1(1 + q + q^2)}{a_1q \cdot a_1^2q^2} &= \frac{7}{12} \\ \frac{21}{a_1^2q^2} &= \frac{7}{12} \\ 7(a_1q)^2 &= 21 \cdot 12 \\ (a_1q)^2 &= 36 \implies a_1q = \pm 6 \implies a_1 = \pm \frac{6}{q} \end{aligned}$$

Gledamo dva slučaja (i) za  $a_1 = \frac{6}{q}$  i (ii) za  $a_1 = -\frac{6}{q}$ :

(i)  $a_1 = \frac{6}{q}$

$$\begin{aligned} \frac{6}{q}(1 + q + q^2) &= 21 / : 3 \\ 2 + 2q + 2q^2 &= 7q \\ 2q^2 - 5q + 2 &= 0 \\ (2q - 1)(q - 2) &= 0 \\ q_1 &= \frac{1}{2}, \quad q_2 = 2, \quad (a_1)_1 = 12, \quad (a_1)_2 = 3. \end{aligned}$$

$$(ii) a_1 = -\frac{6}{q}$$

$$-\frac{6}{q}(1+q+q^2) = 21 / : 3$$

$$-2 - 2q - 2q^2 = 7q$$

$$2q^2 + 9q + 2 = 0$$

$$q_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4}$$

$$q_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}, \quad (a_1)_{3,4} = -\frac{24}{-9 \pm \sqrt{65}}$$

Četiri geometrijska niza zadovoljavaju zadane uvjete zadatka. To su:

1) 12, 6, 3;

2) 3, 6, 12;

3)  $-\frac{24}{-9 + \sqrt{65}}, -6, \frac{-6(-9 + \sqrt{65})}{4}$ ;

4)  $\frac{-6(-9 + \sqrt{65})}{4}, -6, -\frac{24}{-9 + \sqrt{65}}$ .