

Zadatak 43. Izračunaj zbroj n brojeva oblika 1, 11, 111, ...

Rješenje. Opći član niza je

$$\begin{aligned} a_n &= \underbrace{111 \dots 1}_n = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{n-1} \\ &= 1 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}. \end{aligned}$$

Zbroj prvih n članova ovog niza je:

$$\begin{aligned} \frac{10^1 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \dots + \frac{10^n - 1}{9} &= \frac{1}{9}(10 + 10^2 + \dots + 10^n) - n \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9} \left(10 \frac{10^n - 1}{10 - 1} \right) - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1} - 10}{81} - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}. \end{aligned}$$