

Zadatak 55. Zbroj prvih triju članova rastućeg aritmetičkog niza jednak je 15. Ako od prvih dvaju oduzmemo po 1, a trećem dodamo 1, dobit ćemo tri uzastopna člana geometrijskog niza. Odredi zbroj prvih deset članova aritmetičkog niza.

Rješenje.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 15 \text{ — aritmetički niz}$$

$$a_1 - 1, a_2 - 1, a_3 + 1 \text{ — geometrijski niz}$$

Iz uvjeta za aritmetički niz imamo:

$$3a_2 = 15 \implies a_2 = 5,$$

$$a_1 + a_3 = 2a_2, a_1 + a_3 = 10 \implies a_3 = 10 - a_1$$

Uvrstimo li dobiveno u uvjet $(a_2 - 1)^2 = (a_1 - 1)(a_3 + 1)$ za geometrijski niz dobijemo:

$$16 = (a_1 - 1)(a_3 + 1)$$

$$16 = (a_1 - 1)(11 - a_1)$$

$$16 = 11a_1 - 11 - a_1^2 + a_1$$

$$a_1^2 - 12a_1 + 27 = 0$$

$$(a_1 - 3)(a_1 - 9) = 0$$

Kako je niz rastući rješenje je $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ pa je $a_3 = 7$, $d = 2$ i

$$S_{10} = \frac{n}{2}(2a_1 + a_{10}) = \frac{10}{2}(2 \cdot 3 + 9 \cdot 2) = 5 \cdot 24 = 120.$$