

Zadatak 59. Zbroj prvih triju članova geometrijskog niza iznosi 91. Ako im dodamo redom 25, 27 i 1, dobijemo tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Odredi sedmi član u geometrijskom nizu.

Rješenje.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 91 \text{ — geometrijski niz}$$

$$a_1 + 25, a_2 + 27, a_3 + 1 \text{ — aritmetički niz}$$

Iz svojstava aritmetičkog niza imamo:

$$2(a_2 + 7) = a_1 + 25 + a_3 + 1$$

$$2a_2 + 54 = a_1 + a_3 + 26$$

$$2a_2 = a_1 + a_3 - 28$$

$$2a_2 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3 - 28$$

$$3a_2 = a_1 + a_2 + a_3 - 28$$

Za niz vrijedi $a_1 + a_2 + a_3 = 91$. Uvrstimo li to u gore dobiveni rezultat dobijemo:

$$3a_2 = 91 - 28$$

$$3a_2 = 63$$

$$a_2 = 21;$$

Koristeći dobiveno iz $a_1 + a_2 + a_3 = 91$ i svojstva geometrijskog niza dobijemo sustav dvije jednačbe s dvije nepoznanice:

$$a_1 + a_3 = 70$$

$$\underline{a_2^2 = a_1 a_3}$$

$$a_1 + a_3 = 70$$

$$\underline{a_1 a_3 = 441}$$

Iz prve jednačbe imamo $a_3 = 70 - a_1$ to uvrstimo u drugu i dobijemo:

$$a_1(70 - a_1) = 441$$

$$a_1^2 - 70a_1 + 441 = 0$$

$$a_1^2 - 7a_1 + 63a_1 + 441 = 0$$

$$(a_1 - 7)(a_1 - 63) = 0$$

$$(a_1)_1 = 7, (a_1)_2 = 63$$

Za $(a_1)_1 = 7, a_2 = 21$ $q_1 = \frac{a_2}{(a_1)_1} = \frac{21}{7} = 3$ te je sedmi član niza:

$$(a_7)_1 = (a_1)_1 q_1^6 = 7 \cdot 729 = 5103;$$

Za $(a_1)_2 = 63, a_2 = 21$ $q_2 = \frac{a_2}{(a_1)_2} = \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$ te je sedmi član niza:

$$(a_7)_2 = (a_1)_2 q_2^6 = 63 \cdot \frac{1}{729} = \frac{7}{81}.$$