

Zadatak 60. Tri broja čiji je zbroj jednak 114 uzastopni su članovi geometrijskog niza ili prvi, četvrti i dvadesetpeti član aritmetičkog niza. Nađi te brojeve.

Rješenje. Jedno od rješenja je trivijalno rješenje odnosno niz 38, 38, 38, ... Pogledajmo da li postoji još koje. Iz zadanog imamo:

$$\underbrace{a_1}_{b_1} + \underbrace{a_2}_{b_4} + \underbrace{a_3}_{b_{25}} = 114$$

$$b_1 \quad b_1+3d \quad b_1+24d$$

a_1, a_2, a_3 — geometrijski niz; b_1, b_4, b_{25} — aritmetički niz

Iz uvjeta zadatka i svojstva aritmetičkog niza imamo:

$$b_1 + b_1 + 3d + b_1 + 24d = 114$$

$$3b_1 + 27d = 114 / : 3$$

$$b_1 + 9d = 38;$$

Uvrstimo li dobiveno u uvjet $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$ za geometrijski niz dobijemo:

$$(b_1 + 3d)^2 = b_1(b_1 + 24d)$$

$$b_1^2 + 6b_1d + 9d^2 = b_1^2 + 24b_1d$$

$$18b_1d - 9d^2 = 0 / : (9d)$$

$$2b_1 - d = 0$$

$$d = 2b_1;$$

Iz $d = 2b_1$ i $b_1 + 9d = 38$ slijedi:

$$b_1 + 9(2b_1) = 38$$

$$b_1 + 18b_1 = 38$$

$$19b_1 = 38$$

$$b_1 = 2$$

$$d = 2b_1 \implies d = 4;$$

Sada možmo izračunati preostale brojeve:

$$b_4 = b_1 + 3d = 2 + 3 \cdot 4 = 14$$

$$b_{25} = b_1 + 24d = 2 + 24 \cdot 4 = 98;$$

Traženi brojevi su 2, 14, 98. (Ne zaboravimo trivijalno rješenje.)