Zadatak 63. Tri broja čine geometrijski niz. Ako drugi uvećamo za 8, niz postaje aritmetički, a ako zatim posljednji uvećamo za 64, niz što se dobije opet je geometrijski. Odredi te brojeve.

Rješenje. Uvjeti zadatka su:

$$\begin{aligned} a_2^2 &= a_1 a_3 \\ 2(a_2+8) &= a_1 + a_3 \\ (a_2+8)^2 &= a_1(a_3+64); \end{aligned}$$

Stavimo li $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$ posljednje dvije jednadžbe možemo zapisati na ovaj način:

$$\begin{aligned} 2(a_1 q + 8) &= a_1 + a_1 q^2 \\ (a_1 q + 8)^2 &= a_1(a_1 q^2 + 64); \end{aligned}$$

Uvrstimo li $a_2 + 8 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$ iz prve u drugu jednadžbu dobijemo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + a_1 q^2}{2}\right)^2 &= a_1(a_1 q^2 + 64) \ / \ \cdot 4 \\ a_1^2(1 + 2q^2 + q^4) &= 4a_1(a_1 q^2 + 64) \\ a_1(1 + 2q^2 + q^4) &= 4a_1 q^2 + 256 \\ a_1 + 2a_1 q^2 - 4a_1 q^2 + a_1 q^4 &= 256 \\ a_1(1 - 2q^2 + q^4) &= 256 \\ a_1(1 - q^2)^2 &= 256 \\ a_1 &= \frac{256}{(1-q^2)^2}, \quad q \neq 1; \end{aligned}$$

Uvršteno u prvu jednadžbu daje:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{256q}{(1-q^2)^2} + 8\right) &= \frac{256}{(1-q^2)^2} + \frac{256q^2}{(1-q^2)^2} \\ 512q + 16(1-q^2)^2 &= 256 + 256q^2 \ / \ : 16 \\ 32q + 1 - 2q^2 + q^4 &= 16 + 16q^2 \\ q^4 - 18q^2 + 32q - 15 &= 0; \end{aligned}$$

Nultočka dijeli slobodni član polinoma, pa su mogućnosti za nju ± 1, ± 3, ± 5, ± 15:

$$\begin{aligned} q^4 - 18q^2 + 32q - 15 &= 0 \\ q^4 - q^2 - 17q^2 + 17q + 15q - 15 &= 0 \\ (q-1)[q^2(q+1) - 17q + 15] &= 0 \\ (q-1)(q^3 + q^2 - 17q + 15) &= 0 \\ (q-1)(q^3 - q^2 + 2q^2 - 2q - 15q + 15) &= 0 \\ (q-1)^2(q^2 + 2q - 15) &= 0 \\ (q-1)^2(q-3)(q+5) &= 0 \end{aligned}$$

Zbog $q \neq 1$ rješenja su $q_1 = 3$, $q_2 = -5$.

Dakle, imamo dva slučaja:

(i) $q_1 = 3$

$$a_1 = \frac{256}{(1-9)^2} = 4$$

$$a_2 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$a_3 = 12 \cdot 3 = 36;$$

(ii) $q_2 = -5$

$$a_1 = \frac{256}{(1-25)^2} = \frac{4}{9}$$

$$a_2 = \frac{4}{9} \cdot (-5) = -\frac{20}{9}$$

$$a_3 = -\frac{20}{9} \cdot (-5) = \frac{100}{9};$$

Rješenje zadatka su brojevi 4, 12, 36 ili $\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}$.