

Zadatak 64.

Tri su broja uzastopni članovi geometrijskog niza. Ako od trećega oduzmemo 4, dobit će se tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Ako zatim od drugog i trećeg oduzmemo po 1, opet dobijemo tri uzastopna člana geometrijskog niza. Koji su to brojevi?

Rješenje.

Uvijeti zadatka glase:

$$a_2^2 = a_1 a_3$$

$$a_2 = a_1 + a_3 - 4$$

$$(a_2 - 1)^2 = a_1(a_3 - 5);$$

odnosno drugu i treću jednadžbu možemo zapisati i kao sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$2aq = a + aq^2 - 4$$

$$(aq - 1)^2 = a(aq^2 - 5);$$

Iz prve jednadžbe imamo:

$$aq^2 - 2aq + a = 4$$

$$a(q - 1)^2 = 4$$

$$a = \frac{4}{(q - 1)^2};$$

Uvrstimo li dobiveno u drugu jednadžbu dobit ćemo:

$$a^2 q^2 - 2aq + 1 = a^2 q^2 - 5a$$

$$5a - 2aq + 1 = 0$$

$$\frac{20}{(q - 1)^2} - \frac{8q}{(q - 1)^2} + 1 = 0$$

$$20 - 8q + (q - 1)^2 = 0$$

$$q^2 - 10q + 21 = 0$$

$$(q - 3)(q - 7) = 0;$$

Dakle, imamo dva slučaja:

$$(i) \quad q_1 = 3$$

$$a_1 = \frac{4}{(3 - 1)^2} = 1$$

$$a_2 = 1 \cdot 3 = 3$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 = 9;$$

$$(ii) \quad q_2 = 7$$

$$a_1 = \frac{4}{(7 - 1)^2} = \frac{1}{9}$$

$$a_2 = \frac{1}{9} \cdot 7 = \frac{7}{9}$$

$$a_3 = \frac{7}{9} \cdot 7 = \frac{49}{9};$$

Rješenje zadatka su brojevi 1, 3, 9 ili $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}$.