Zadatak 5. Koji su od sljedećih nizova monotoni:

1) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; **2)** $a_n = 1.5^n$;

3) $a_n = 1 + 3(n-2)$; **4)** $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$;

5) $a_n = \dfrac{1}{n!}$; **6)** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$?

Rješenje. **1)** $a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{2}{3} \implies a_1 < a_2$. Ako vrijedi $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ niz će biti monotono rastući. Provjerimo:

$$a_n < a_{n+1} \iff \frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2} \iff (n-1)n < (n+1)(n+2);$$

Zadnja nejednakost vrijedi za svaki $n \in \mathbf{N}$ pa je niz monotono rastući.

2) $a_n = 1.5^n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$;

$a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{3}{2} \implies a_1 < a_2$. Ako vrijedi $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ niz će biti monotono rastući. Provjerimo:

$$a_n < a_{n+1} \iff \left(\frac{3}{2}\right)^n < \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \iff 1 < \frac{3}{2};$$

Zadnja nejednakost je istinita pa je niz monotono rastući.

3) $a_1 = -2$, $a_2 = 1 \implies a_1 < a_2$. Ako vrijedi $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ niz će biti monotono rastući. Provjerimo:

$$a_n < a_{n+1} \iff 1 + 3(n-2) < 1 + 3(n-1) \iff -6 < -3;$$

Zadnja nejednakost je istinita pa je niz monotono rastući.

4) $a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{1}{2} \implies a_1 < a_2$. Ako vrijedi $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ niz će biti monotono rastući. Provjerimo:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\iff (-1)^n \frac{n-1}{n} < (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \\ &\iff \frac{n-1}{n} < -\frac{n}{n+1} \iff 2n^2 < 1 \iff n^2 < \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

Zadnja nejednakost nije istinita pa niz nije monotono rastući.

5) $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2} \implies a_1 > a_2$. Ako vrijedi $a_n > a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ niz će biti monotono padajući. Provjerimo:

$$a_n > a_{n+1} \iff \frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!} \iff n+1 > 1 \iff n > 0$$

Zadnja nejednakost je istinita pa je niz monotono padajući.

6) $a_1 = -1\,,\ a_2 = \frac{1}{2} \implies a_1 < a_2\,.$ Ako vrijedi $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$ niz će biti monotono rastući. Provjerimo:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\iff \frac{(-1)^n}{n!} < \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\iff 1 < -\frac{1}{n+1}; \end{aligned}$$

Zadnja nejednakost nije istinita pa niz nije monotono rastući.