Zadatak 15. Niz (a_n), $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ je monoton i omeđen. Dokaži to! Odredi prirodni broj n_0 takav da je $|a_n - 1| < \varepsilon$ za sve $n > n_0$, ako je **1)** $\varepsilon = 0.1$; **2)** $\varepsilon = 0.01$; **3)** $\varepsilon = 0.001$.

Rješenje. $a_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$;

$a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 1 = \dfrac{2}{3}$, $a_3 = \dfrac{3}{4}$, $a_4 = \dfrac{4}{5}$, $\ldots \implies$ niz je monotono rastući s najmanjim članom $a_1 = \dfrac{1}{2}$. Provjerimo. Niz će biti monotono rastući ako je $a_{n+1} - a_n > 0$ za svaki $n \in \mathbf{N}$:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \iff 1 - \frac{1}{n+2} - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > 0 \iff \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0$$

$$\iff 3\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

što je istinita tvrdnja pa je niz monotono rastući. Pogledajmo da li postoji limes niza:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1;$$

Dakle niz je omeđen: $\forall n \in \mathbf{N},\ \ a_n \in [0, 1\rangle$.

1) Nađimo sada takav n_0 da je $|a_n - 1| < 0.1$ za sve $n > n_0$:

$$|a_n - 1| < 0.1 \iff \left|1 - \frac{1}{n+1} - 21\right| < 0.1 \iff \frac{1}{n+1} < 0.1$$

$$\iff n+1 > 10 \iff n > 9;$$

$n_0 = 9$;

2) Nađimo sada takav n_0 da je $|a_n - 1| < 0.01$ za sve $n > n_0$:

$$|a_n - 1| < 0.01 \iff \left|1 - \frac{1}{n+1} - 21\right| < 0.01 \iff \frac{1}{n+1} < 0.01$$

$$\iff n+1 > 100 \iff n > 99;$$

$n_0 = 99$;

3) Nađimo sada takav n_0 da je $|a_n - 1| < 0.001$ za sve $n > n_0$:

$$|a_n - 1| < 0.001 \iff \left|1 - \frac{1}{n+1} - 21\right| < 0.001 \iff \frac{1}{n+1} < 0.001$$

$$\iff n+1 > 1000 \iff n > 999;$$

$n_0 = 999$.