Zadatak 17. Dokaži da je niz (a_n) omeđen ako je:

1) $a_n = \dfrac{n+2}{2^n}$; **2)** $a_n = \dfrac{2^n}{1+3^n}$;

3) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

4) $a_n = \sqrt[3]{8n-n^3} + \sqrt[3]{8n+n^3}$;

5) $a_n = \log_{1/2} \dfrac{n+1}{n}$;

6) $a_n = \log(3n+2) - \log(n+1)$.

Rješenje. **1)** $a_n = \dfrac{n+2}{2^n} = \dfrac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n-1}} > 0$;

$a_1 = \dfrac{3}{2},\ a_2 = 1,\ a_3 = \dfrac{5}{8},\ a_4 = \dfrac{2}{8},\ \ldots$

Niz je monotono padajući

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{n+3-2(n+2)}{2^{n+1}} = \frac{-(n+1)}{2^{n+1}} < 0;$$

te je stoga $a_1 = \dfrac{3}{2}$ najveći član niza. Dakle, $0 < a_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.

2) $a_n = \dfrac{2^n}{1+3^n} > 0$;

$a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_2 = \dfrac{2}{5},\ a_3 = \dfrac{2}{7},\ \ldots$

Niz je monotono padajući

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{1+3^{n+1}} - \frac{2^n}{1+3^n} = -\frac{2^n(3^n-1)}{(1+3^n)(1+3^{n+1})} < 0;$$

te je stoga $a_1 = \dfrac{1}{2}$ najveći član niza. Dakle, $0 < a_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$;

$a_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414,\ a_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0.318,\ a_3 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268,\ \ldots$

Niz je monotono padajući te je stoga $a_1 = \sqrt{2} - 1$ najveći član niza. Dakle, $0 < a_n \leqslant (\sqrt{2} - 1)$.

4) $a_n = \sqrt[3]{8n-n^3} + \sqrt[3]{8n+n^3} > 0$;

$a_1 = \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9} \approx 3.99$; $a_2 = 2 + 2\sqrt[3]{3} \approx 4.88$; $a_3 = -\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{51} \approx 2.26$;
$a_4 = -\sqrt[3]{-32} + 2\sqrt[3]{96} \approx 1.40$;

Niz je monotono padajući od člana a_2 te je stoga $a_2 = 2 + 2\sqrt[3]{3}$ najveći član niza. Dakle, $0 < a_n \leqslant (2 + 2\sqrt[3]{3})$.

5) $a_n = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{n+1}{n} = \log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;

Stavimo $b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$;

$$1 < b_n \leqslant 2 \implies \log_{\frac{1}{2}} 2 \leqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \log_{\frac{1}{2}} 1 \implies -1 \leqslant a_n < 0.$$

6) $a_n = \log(3n+2) - \log(n+1) = \log \dfrac{3n+2}{n+1} = \log\left(3 - \dfrac{1}{n+1}\right)$;

Stavimo $b_n = 3 - \dfrac{1}{n+1}$. Niz je monotono padajući pa je $b_1 = \dfrac{5}{2}$ najveći član niza i vrijedi:

$$\frac{5}{2} \leqslant b_n < 3$$

odakle slijedi

$$\log\frac{5}{2} \leqslant a_n < \log 3.$$