

Zadatak 21. Dokaži da je niz (a_n) s općim članom a_n omeđen odozdo:

$$1) a_n = \frac{1}{n} + \sin \sqrt{n}; \quad 2) a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n+2}{n^2}.$$

Rješenje. 1) $a_n = \frac{1}{n} + \sin \sqrt{n};$

Iz $\sin \sqrt{n} \in [-1, 1]$ slijedi

$$\frac{1}{n} + \sin \sqrt{n} \geq \frac{1}{n} - 1 > -1.$$

te je niz a_n odozdo omeđen.

2) Niz $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n+2}{n^2}$ se sastoji od dva podniza:

$$1) -\frac{1}{2k-1} + \frac{2k+1}{(2k-1)^2} = \frac{2k+1-2k+1}{(2k-1)^2} = \frac{2}{(2k-1)^2} > 0, \quad k \in \mathbf{N};$$

$$2) \frac{1}{2k} + \frac{2k+2}{(2k)^2} = \frac{4k+2}{4k^2} > 0, \quad k \in \mathbf{N};$$

Oba podniza su omeđena odozdo pa je i sam niz odozdo omeđen.