

Zadatak 22. Dokaži da je niz (a_n) omeđen:

$$1) a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4};$$

$$2) a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 2}{2};$$

$$3) a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}.$$

Rješenje.

1) Dokazuje se indukcijom. Članovi niza su pozitivni. Tvrdimo: $a_n < 1$. Vrijedi $a_1 = \frac{3}{4} < 1$. Ako je $a_n < 1$, onda imamo $a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4} < \frac{1 + 3}{4} = 1$.

2) Niz je konstantan.

3) Indukcijom ćemo pokazati $0 < a_n < 1$ za $n > 1$.

Imamo $a_2 = 1$ i $0 < a_3 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} < 1$. Pretpostavimo da vrijedi $0 < a_{n-1} < 1, 0 < a_n < 1$ pa imamo:

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2} = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_n}{2} > \frac{0}{2} + \frac{0}{2} = 0;$$

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2} = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_n}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$