

Zadatak 25.

Koji su od sljedećih nizova omeđeni? Za svaki omeđeni niz navedi interval unutar kojeg se nalaze svi članovi niza

1) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$;

2) $a_n = 1.5^n$;

3) $a_n = 1 + 3(n-2)$;

4) $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$;

5) $a_n = \frac{1}{n!}$;

6) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Rješenje.

1) $a_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$, niz je monotono rastući:

$$a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{2}{n+2} - 1 + \frac{2}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

te mu je najmanji član $a_1 = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, pa je lako zaključiti da je $[0, 1)$ jedan takav interval.

2) $a_n = 1.5^n$;

Niz je monotono rastući i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, te niz nije omeđen.

3) $a_n = 1 + 3(n-2)$;

Niz je monotono rastući i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, te niz nije omeđen.

4) $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$;

Imamo dva podniza:

za $n = 2k - 1$, $n \in \mathbf{N}$:

$$-\frac{n-1}{n} = -1 + \frac{1}{n}, \quad -1 < -1 + \frac{1}{n} < 0;$$

za $n = 2k$, $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}, \quad 0 < 1 - \frac{1}{n} < 1;$$

te su svi članovi niza iz $\langle -1, 1 \rangle$;

5) $a_n = \frac{1}{n!}$; $0 < a_n \leq 1$ te su svi članovi niza iz $\langle 0, 1 \rangle$;

6) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$;

Imamo dva podniza:

za $n = 2k - 1$, $n \in \mathbf{N}$:

$$-1 \leq -\frac{1}{n!} < 0;$$

za $n = 2k$, $n \in \mathbf{N}$:

$$0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{2};$$

te su svi članovi niza iz $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.