

Zadatak 26.

Dan je niz (a_n) , $a_n = \frac{3n+4}{n+2}$.

- 1) Dokaži da je niz rastući.
- 2) Dokaži da je niz omeđen.
- 3) Odredi limes niza.
- 4) Nađi onaj član niza za koji je razlika limesa i svakog sljedećeg člana manja od 0.01.

Rješenje.

1)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+7}{n+3} - \frac{3n+4}{n+2} = \frac{3n^2 + 33n + 21 - (3n^2 + 10n + 8)}{(n+2)(n+3)} = \frac{23n+13}{(n+2)(n+3)} > 0;$$

te je niz rastući.

2) Kako je niz rastući najmanji član mu je $a_1 = \frac{7}{3}$ i

$$a_n = \frac{3n+4}{n+2} = \frac{3n+6-2}{n+2} = \left(3 - \frac{2}{n+2}\right) < 3.$$

te su svi članovi niza iz $\left[\frac{7}{3}, 3\right)$.

3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+6-2}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n+2}\right) = 3.$$

4)

$$\begin{aligned} |a_n - 3| < 0.01 &\iff \left|3 - \frac{2}{n+2} - 3\right| < 0.01 \iff \frac{2}{n+2} < 0.01 \\ &\iff n+2 > 200 \iff n > 198. \end{aligned}$$