

Zadatak 27. Dokaži da je niz s općim članom

$$a_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots 2\sqrt{2}}}}$$

(n korijena) rastući i izračunaj mu limes.

Rješenje. Vrijedi $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Da je niz rastući, provjeravamo indukcijom:

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1.$$

Iz $a_n > a_{n-1}$ slijedi

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{2a_{n-1}} = a_n.$$

Omeđenost $a_n < 2$ također provjeravamo indukcijom:

$a_1 = \sqrt{2} < 2$. Pretpostavimo da je $a_n < 2$ pa imamo

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Niz je rastući i omeđen, pa ima limes. Neka je to a . Uz $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ za $n \rightarrow \infty$ slijedi $a = \sqrt{2a}$, odakle je $a = 2$.