Zadatak 28. Neka je $a_1 = 0$, $a_n = \dfrac{2a_{n-1}+1}{3}$ za $n \geqslant 2$. Dokaži da je niz monoton i ograničen i izračunaj mu limes.

Rješenje. Provjerimo da li je niz rastući:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \iff \frac{2a_n+1}{3} - a_n > 0 \iff a_n < 1;$$

Tvrdimo $a_n < 1$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Dokaz provodimo indukcijom:
$a_1 < 1$;
Pretpostavimo da je $a_{n-1} < 1$ tada je

$$a_n = \frac{2a_{n-1}+1}{3} < \frac{2 \cdot 1 + 1}{3} = 1;$$

te je niz rastući i vrijedi $0 \leqslant a_n < 1$.