

Zadatak 13. Zbroj beskonačnog konvergentnog geometrijskog reda jednak je 3, a zbroj kubova svih njegovih članova iznosi $\frac{108}{13}$. Odredi niz.

Rješenje. Uvjeti zadatka daju sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a_1 \frac{1}{1-q} = 3, \quad |q| < 1$$

$$a_1^3 \frac{1}{1-q^3} = \frac{108}{13}$$

$$a_1 = 3(1-q)$$

$$13a_1^3 = 108(1-q)(1+q+q^2);$$

Uvrstimo li vrijednost za a_1 iz prve u drugu jednadžbu dobijemo:

$$13a_1^3 = 36a_1(1+q+q^2)$$

$$13a_1^2 = 36(1+q+q^2)$$

$$13 \cdot 9(1-q)^2 = 36(1+q+q^2)$$

$$117(1-2q+q^2) = 36 + 36q + 36q^2$$

$$81q^2 - 270q + 81 = 0 / : 27$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$(3q-1)(q-3) = 0 \implies q = \frac{1}{3};$$

$$a_1 = 3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} \implies a_1 = 2.$$