Zadatak 14. Omjer zbroja kubova svih članova beskonačnog konvergentnog geometrijskog reda i zbroja njihovih kvadrata jednak je $12:13$. Zbroj prvih dvaju članova iznosi $\frac{4}{3}$. Nađi taj red.

Rješenje. Uvjeti zadatka daju sustav dviju jednadžbi koji svodimo na sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a_1^3\frac{1}{1-q^3} : a_1^2\frac{1}{1-q^2} = 12:13,\ |q|<1$$

$$a_1 + a_2 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\dfrac{a_1^3}{(1-q)(1+q+q^2)}}{\dfrac{a_1^2}{(1-q)(1+q)}} = \frac{12}{13}$$

$$a_1(1+q) = \frac{4}{3}$$

Nakon sređivanja prve jednadžbe imamo:

$$\frac{a_1(1+q)}{1+q+q^2} = \frac{12}{13}$$

Uvrstimo li u nju prvu jednadžbu dobijemo:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{q^2+q+1} = \frac{12}{13} \ /\ \cdot\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{q^2+q+1} = \frac{9}{13}$$

$$9q^2+9q+9 = 13$$

$$9q^2+9q-4 = 0$$

$$9q^2-3q+12q-4 = 0$$

$$(3q+4)(3q-1) = 0$$

$$q_1 = -\frac{4}{3},\ q_2 = \frac{1}{3}$$

Kako je $|q|<1$ slijedi $q=\frac{1}{3}$ pa je:

$$a_1(1+q) = \frac{4}{3}$$

$$a_1\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$a_1\frac{4}{3} = \frac{4}{3} \implies a_1 = 1,\ \ q = \frac{1}{3}.$$