

Zadatak 22. Nad visinom jednakostraničnog trokuta konstruiran je novi jednakostraničan trokut, nad visinom novoga opet jednakostraničan trokut itd. Koliki je zbroj površina svih na ovaj način konstruiranih trokuta ako je duljina stranice prvog jednaka a ?

Rješenje. Duljine stranica ovako dobivenih trokuta su:

$$a_1 = a, a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a, a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 a, a_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 a, \dots$$

Površina jednakostraničnog trokuta stranice a iznosi $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ pa su površine zadanih trokuta:

$$P_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$P_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}a_3^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4,$$

$$P_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}a_4^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6,$$

⋮

Površine čine geometrijski niz s kvocijentom $q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ te je zbroj površina:

$$P = \sum P_i = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2.$$