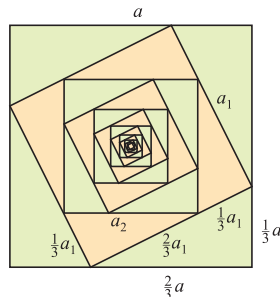


**Zadatak 23.**

Dan je kvadrat  $ABCD$  sa stranicom duljine  $a$ . U točki koja stranicu  $\overline{AB}$  dijeli u omjeru  $1 : 2$  vrh je novog kvadrata što je upisan zadanom. Po istom se principu sada ovome upiše kvadrat i postupak se nastavlja. Koliki je zbroj površina svih ovih kvadrata?

**Rješenje.**

Iz slike vidimo da novonastali kvadrat ima duljinu stranice jednaku duljini hipotenuze pravokutnog trokuta kojemu su duljine kateta  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{2}{3}$  duljine stranice kvadrata kojemu je on upisan. Stavimo  $a_1 = a$  te imamo:

$$a_2^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 \implies a_2^2 = \frac{5}{9}a^2,$$

$$a_3^2 = \frac{5}{9}a_2^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^2 a^2,$$

$$a_4^2 = \frac{5}{9}a_3^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^3 a^2;$$

Zbroj površina ovako dobivenih kvadrata je:

$$\begin{aligned} P &= \sum P_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \dots \\ &= a^2 + \frac{5}{9}a^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2 a^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^3 a^2 + \dots \\ &= a^2 \left(1 + \frac{5}{9} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \dots\right) \\ &= a^2 \frac{1}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{9}{4}a^2. \end{aligned}$$