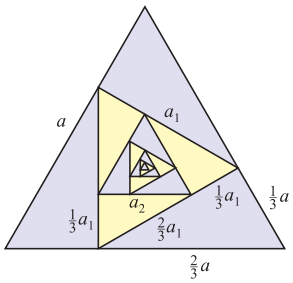
Zadatak 24. Dan je jednakostranični trokut ABC sa stranicom duljine a. Točka P koja dijeli stranicu $\overline{AB}$ u omjeru $1:2$ vrh je novog jednakostraničnog trokuta PQR koji je upisan trokutu ABC. Po istom pravilu trokutu PQR upišemo jednakostraničan trokut te postupak nastavljamo. Koliki je zbroj površina svih takvih jednakostraničnih trokuta?

Rješenje.



Iz slike vidimo da novonastali trokut ima duljinu stranice jednaku duljini katete pravokutnog trokuta kojemu je duljina druge katete kateta $\frac{1}{3}$, a duljina hipotenuze $\frac{2}{3}$ duljine stranice trokuta kojemu je on upisan. Stavimo $a_1 = a$ te imamo:

$$a_1 = a \implies P_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$a_2^2 = \left(\frac{2}{3}a_1\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a_1\right)^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{9}a^2 = \frac{1}{3}a^2 \implies P_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{3}a^2,$$

$$a_3^2 = \frac{1}{3}a_2^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 a^2 \implies P_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 a^2,$$

$$a_4^2 = \frac{1}{3}a_3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 a^2 \implies P_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 a^2;$$

Površine čine geometrijski niz s kvcijentom $q = \frac{1}{3}$ te je zbroj svih površina jednak:

$$P = \sum P_i = \frac{P_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$