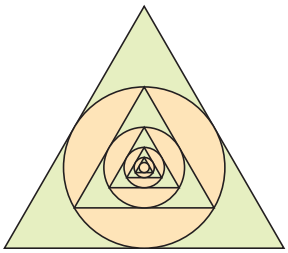
Zadatak 26. Jednakostraničnom trokutu ABC, $|AB| = a$, upisana je kružnica, ovoj kružnici jednakostraničan trokut, trokutu opet kružnica itd. Koliki je zbroj površina svih trokuta, a koliki svih krugova što su omeđeni konstruiranim kružnicama?

Rješenje.



Radi se o jednakostraničnom trokutu. Upisana kružnica većem trokutu je opisana kružnica manjem trokutu:

$$a_1 = a \implies r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a_2 \implies a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a}{2};$$

$$a_2 = \frac{a}{2} \implies r_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a_3 \implies a_3 = \frac{a}{4};$$

$$a_3 = \frac{a}{4} \implies r_3 = \frac{\sqrt{3}}{24}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a_4 \implies a_4 = \frac{a}{8};$$

$$\vdots$$

Stranice trokuta čine geometrijski niz s kvocijentom $\frac{1}{2}$, pa i površine trokuta čine geometrijski niz s kvocijentom $\frac{1}{4}$ i zbroj svih površina je:

$$P_\triangle = \frac{P}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Polumjeri krugova također čine geometrijski niz s kvocijentom $\frac{1}{2}$, pa i njihove površine čine geometrijski niz s kvocijentom $\frac{1}{4}$ i zbroj svih površina je:

$$P_\circ = \frac{r_1^2\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2\pi = \frac{a^2\pi}{9}.$$