

Zadatak 5.

Odredi opći član niza (u_n) zadanog s:

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 8.$$

Rješenje.

$$u_{n+3} = 3(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_n$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 8, \quad u_4 = 3 \cdot 5 + 0 = 15, \quad u_5 = 3 \cdot 7 + 3 = 24, \\ u_6 = 3 \cdot 9 + 8 = 35, \dots$$

Prvih šest članova niza upućuje na zaključak da je $u_n = n^2 - 1$. Provjerimo matematičkom indukcijom:

Bazu imamo. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za u_n, u_{n+1}, u_{n+2} provjerimo je za u_{n+3} :

$$u_{n+3} = 3(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_n = 3[(n+2)^2 - 1 - (n+1)^2 + 1] + n^2 - 1 \\ = 3(2n+3) + n^2 - 1 = 6n + 9 + n^2 - 1 = (n+3)^2 - 1.$$